Bibliographie.

Maurice Fréchet, Les Espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'Analyse générale (Collection Borel), XI + 296 pages, Paris, Gauthier-Villars et C[ie], 1928.

La théorie des espaces abstraits, dont les fondaments systématiques remontent à la Thèse de M. FRÉCHET, a subit un développement très rapide et extensif dans le dernier dizaine d'années. Dans le grand nombre de publications et dans la foule de notions y introduites, l'orientation est devenue extrêmement difficile. Le présent volume de M. FRÉCHET rend le grand service de réunir sous deux aspects généraux les notions et les résultats obtenus par lui-même et par d'autres auteurs.

Dans une introduction générale, l'auteur expose les rélations de l'analyse fonctionnelle avec la théorie des ensembles abstraits.

La première partie du livre est consacrée à la généralisation de la notion de nombre de dimensions et à la généralisation de la notion de distance. Deux ensembles ont, d'après la définition de M. FRÉCHET, le même type de dimension, lorsque chacun d'eux est homéomorphe d'un sous-ensemble de l'autre. On arrive de cette façon à une interpolation de types de dimensions entre les types entiers n (n dénote le type de dimension de l'espace cartésien E_n). Par la généralisation de la notion de distance, on est amené à la notion d'espace métrique due à M. FRÉCHET, dont l'étude comprend la théorie des espaces à une infinité de dimensions. Comme des interpretations de la théorie générale, il y a dans cette partie plusieurs digressions sur l'invariance du nombre de dimensions, sur l'invariance de domaine, sur les courbes de JORDAN, etc.

La seconde partie comprend la généralisation des notions de voisinage et de convergence. Ces recherches ont plutôt un intérêt philosophique en ce qui concerne la nature de la notion de continuité et la détermination des éléments essentiellement déscriptifs de cette notion-là. De ce point de vue générale, les espaces métriques et leur relations avec le calcul fonctionnel seront éclairés du nouveau.

Le livre donne une orientation excellente sur les idées et résultats de cette théorie moderne; il aurait été avantageux, parait-il, de présenter quelquesunes des méthodes et des types de démonstrations qui sont caractéristiques dans la théorie. Certainement, le livre contribuera beaucoup à la compréhension et à la connaissance de cette belle théorie dont les idées et les résultats les plus importants sont dûs à l'auteur même.

B. de Kerékjártó,

Waclaw Sierpiński, Leçons sur Les Nombres transfinis (Collection Borel), avec une préface de M. Émile Borel, VI + 240 pages, Paris, Gauthier-Villars et C[ie], 1928.

La théorie des ensembles, une des créations les plus profondes et les plus hardies de l'esprit humain, se heurtait après son premier essor contre des difficultés logiques; pour les surmonter, il fallait baser la théorie sur des fondaments plus solides. Dès lors et par excellence dans nos jours, l'analyse de ces fondaments fut reprise par plusieurs auteurs et le sujet est encore loin d'être épuisé.

Tout ce qu'il en soit, la théorie s'est dévéloppée de jour en jour, sans attendre la révision définitive de ses fondaments. Une grande partie de ce développement est due aux géomètres groupés autour des *Fundamenta Mathematicae*. M. Borel a eu l'idée heureuse d'inviter un membre éminent de cette groupe de rédiger, pour sa Collection, une monographie sur la théorie générale des ensembles, allant jusqu'aux derniers résultats.

Le titre de l'ouvrage rappelle le rôle central des nombres transfinis cardinaux ainsi que ordinaux, dans la théorie en question. Mais, en réalité, le livre embrasse toutes les parties de la théorie des ensembles abstraits. Après avoir introduit les premiers notions (sous-ensembles, somme et produit d'ensembles etc.), l'auteur s'occupe de la correspondance biunivoque des ensembles et il en déduit l'idée des nombres cardinaux et le calcul avec ces nombres. Pour familiariser le lecteur avec ces abstractions, il analyse d'une façon détaillée les ensembles dénombrables et ceux de puissance du continu. Il passe aux inégalités entre des nombres cardinaux, un des chapitres les plus intéréssants de la théorie; que l'auteur nous permette à cette occasion d'appeler son attention au fait que son „Théorème de M. Banach" se trouve déjà dans une Note de Jules König, imprimée en 1905 dans les *Comptes rendus* (t. 143, p. 112).

Un chapitre particulier est consacré à l'axiome du choix et aux nombreuses applications de cette axiome. Mais, la plus importante de ces applications, le théorème de M. Zermelo que tout ensemble peut être bien ordonné, est réservée pour la fin de l'ouvrage.

Les autres chapitres s'occupent des propriétés génerales des ensembles ordonnés et en particulier de celles des ensembles bien ordonnés, puis des types d'ordre et des nombres ordinaux, du calcul qui s'y rattache et des propriétés arithmétiques des nombres ordinaux. Il suit la théorie des alephs, lesquels se confonderont à la fin, grâce au théorème de M. Zermelo, avec les nombres cardinaux.

Conformément à son but, l'ouvrage ne s'occupe pas des difficultés logiques de la théorie des ensembles. L'auteur se place au point de vue des mémoires classiques de Cantor, mais il a aussi des égards pour les intuitionistes; ainsi, par exemple, il distingue les ensembles effectivement énumérables des ensembles dénombrables.

Le Préface du livre est de M. Borel dont les idées bien connues sur la théorie des ensembles ne sont pas toujours les mêmes que celles de l'auteur et qui, par exemple, n'admet pas la réalité de *tous* les nombres transfinis. M. BOREL signale un livre en préparation de M. LUSIN, dont l'attitude dans ces questions est analogue à la sienne.

Certes, le livre de M. SIERPIŃSKI fera son mieux pour populariser la théorie des ensembles, il est même possible qu'il gagnera la sympathie de ceux qui on encore peur de cette théorie „touchant à la philosophie". Mais, d'autre part, nous attendons avec impatience le livre de M. LUSIN; nous sommes confirmés que la différence des opinions n'est que apparent et se réduisera finalement en substance à des questions de términologie.

L. Kalmár.

Karl Menger, Dimensionstheorie, IV + 320 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1928.

Das vorliegende Buch von MENGER gibt eine zusammenfassende Darstellung von denjenigen sehr interessanten Untersuchungen, die im Anschluss an die BROUWERsche Begründung des natürlichen Dimensionsbegriffes insbesondere von URYSOHN und von MENGER geführt worden sind.

Nach einer Einführung in die mengentheoretische Geometrie wird der von BROUWER herrührende Dimensionsbegriff in der von URYSOHN und MENGER modifizierten Form dargestellt. Es folgt der von MENGER und URYSOHN herrührende Summensatz in verschiedenen Formulierungen, darunter als Korollar der Satz von der Zerlegbarkeit einer n-dimensionalen Menge in $n+1$ nulldimensionale Mengen. In einem weiteren Abschnitt wird die dimensionelle Struktur von Mengen einer tiefgehenden Behandlung unterzogen. Der Abschnitt über den Zerlegungssatz ist dimensionstheoretischen Verallgemeinerungen des grundlegenden LEBESGUEschen Satzes gewidmet. Über stetige Abbildungen kommen einige sich an LEBESGUEsche Ideen anschliessenden Untersuchungen. Die Hauptresultate der Theorie sind (nach der Ansicht des Referenten) die im Abschnitt VIII enthaltenen Sätze: 1. offene Mengen im n-dimensionalen CARTESischen Raum R_n sind dimensionstheoretisch n dimensional; 2. eine im Sinne der Dimensionstheorie n-dimensionale, in R_n liegende Menge besitzt innere Punkte. Der erste Satz wurde von BROUWER mittels des LEBESGUEschen Lemmas, und neulich von SPERNER einfacher bewiesen; in der MENGERschen Darstellung des äusserst eleganten Beweises von SPERNER ist ein Fehler unterlaufen. Der zweite Satz folgt auf Grund des Summensatzes aus Resultaten von FRÉCHET und BROUWER über Homöomorphie von abzählbaren in sich dichten Mengen. Das schönste Resultat von MENGER ist die im IX Abschnitt erbrachte Charakterisierung der mit Koordinaten beschreibbaren Räume: damit ein separabler Raum mit einer Teilmenge eines CARTESischen Raumes homöomorph sei, ist notwendig und hinreichend, dass er eine endliche Dimension besitze. In einem Schlussabschnitt werden die Hauptsätze der Dimensionstheorie nochmals zusammengestellt und einige ungelöste Probleme erwähnt, darunter der Satz, dass das Produkt eines m- und eines n-dimensionalen Raumes $m+n$-dimensional ist.

Bei der Lektüre des äusserst sorgfältig und gut geschriebenen Buches kann es der Aufmerksamkeit nicht entgehen, welchen objektiveren Standpunkt der Verfasser in seinen Originalabhandlungen als in seinem Buch eingenommen hat. In einer historischen Bemerkung auf S. 242 f. wird auf eine dimensionstheoretisch apodiktische Weise die Bedeutung der topologischen Abbildungen in Zweifel gezogen; glücklicherweise gleich darauf wieder gerechtfertigt. Der Referent ist nicht derselben Ansicht: es könnte die Dimensionsdefinition falsch sein und die für so viele Gebiete der Mathematik grundlegenden topologischen Abbildungen ihre Bedeutung doch behalten; die Dimensionsdefinition erhält eben durch die topologische Invarianz ihre Bedeutung. Die grundsätzliche Vermeidung der Metrik, und deren Ersatz durch Doppelfolgen kann auch nicht begrüsst werden; es wäre ähnlich der GOURSATschen Satz in der komplexen Funktionentheorie grundsätzlich zu vermeiden; statt dessen wäre es angebrachter, die von FRÉCHET und in der eleganten, definitiven Form von ALEXANDROFF—URYSOHN herrührenden Metrisierungssätze darzustellen und zu gebrauchen.

Das sind jedoch eigene Bedenken des Referenten. Es muss zum Schluss betont werden, dass im Ganzen das MENGERsche Buch eine vorzügliche und interessante Darstellung eines der modernsten und schönsten Gebiete der Topologie gibt, an dessen Entwicklung der Verfasser einen hervorragenden Anteil hat.

B. von Kerékjártó.

Adolf Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre (Grundlehren der math. Wissenschaften IX), dritte Auflage, XIV + 424 S., Berlin, J. Springer, 1928.

Es ist keine leichte Aufgabe, einen mathematischen Gegenstand so darzustellen, dass sie auch den Nichtmathematikern verständlich sei. Denn die Gefahr, dass das Bestreben nach einer populären Darlegung zur Unstrenge führt und statt Allgemeinverständlichkeit auch bei den Fachmathematikern Unklarheit hervorruft, ist allzusehr bekannt. Diese schwere Aufgabe stellte sich FRAENKEL beim Verfassen seines Werkes. Die Tatsache, dass das Buch binnen Kurzem in drei Auflagen erschienen ist, ist der beste Beweis, dass es bei Mathematikern und Philosophen gleichzeitig anerkannt und beliebt, seinem Ziele vollständig entspricht und die erwähnten Schwierigkeiten in anerkennungswerter Weise überwältigt.

Das Buch besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil enthält die klassische, mit geringer Ausnahme von CANTOR herrührende, abstrakte Mengenlehre in inhaltlich-anschaulicher Auffassung; der zweite Teil behandelt, nach Aufzählung der Antinomien, durch die jene Auffassung ad absurdum geführt wird, diejenigen Standpunkte, die berufen sind, die wesentlichen Teile der Mengenlehre zu begründen, ohne in die erwähnten Widersprüche zu geraten. Schon die füheren Auflagen wurden allgemein als ein, zum Studium der die Grundlagen der Mengenlehre betreffende Literatur vorbereitendes Lehrbuch betrachtet, wobei der Standpunkt, eine vollständige systematische Darstellung der Mengenlehre zu geben, in Hintergrund getreten ist. Dies veranlasste FRAENKEL dazu, in der vorliegenden dritten Auflage besonderen Wert auf die Ergänzung des zweiten Teils zu legen.

Der erste Teil ist wenig verändert. Mit Freude wird man die hinzugefügten, wohl ausgewählten Übungsbeispiele begrüssen. Wesentlich erweitert ist hingegen der zweite Teil. Nach Darlegung der Antinomien und des Intuitionismus wird die mit den Namen WHITEHEADS und RUSSELLS verknüpfte logizistische Richtung dargestellt, worauf in den früheren nur kurz eingegangen wurde. Die axiomatische Methode und im Zusammenhange damit die formalistische Richtung erhielt eine wesentlich ergänzte Darlegung. Die neueren Resultate der Grundlagenforschung sind durchwegs in Betracht gezogen.

Die Objektivität FRAENKELS bei der Auseinandersetzung der verschiedenen Auffassungen ist allgemein bekannt und anerkannt. Vermöge dieser Objektivität erscheinen die Gegensätze zwischen den verschiedenen Richtungen geringer zu sein, als es die Repräsentanten dieser Richtungen (vielleicht aus Mangel an Objektivität) selbst annehmen. Sein eigener Standpunkt wird gesondert in wenigen Seiten vorgetragen. Darin wird eine Art des Logizismus, die mehr Raum der axiomatischen Methode gestattet, als die bisherigen, dem Intuitionismus und dem Formalismus vorgezogen.

Der Referent gestattet sich zwei Bemerkungen. Die eine betrifft das in Anschluss an ZERMELO von FRAENKEL aufgestellte Axiomensystem. Man könnte verschiedene Einwände, die gegen dieses Axiomensystem — allerdings grösstenteils unberechtigter Weise — erhoben wurden, dadurch beheben, indem man neben dem Mengenbegriff auch den Begriff der Funktion als undefinierten Grundbegriff betrachtet, indem man ferner die Aussagen **4a—c**, welche bei der heutigen Form des Axiomensystems zur Definition des Funktionsbegriffes dienen, als Axiome ansieht. Durch diese, formal geringe, Abänderung würde das Axiomensystem eine einzige Zählaussage statt einer Konjunktion von abzählbar unendlich vielen Zählaussagen werden. Der Nachteil, dass das Axiomensystem hierdurch statt auf einer, auf zwei Grundbegriffen beruhen würde, ist ohne Belang; es ist ja die (möglichst kleine) Anzahl der Grundbegriffe bloss Eleganzfrage.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf die Benennung „Paradoxie von SKOLEM“ für den LÖWENHEIM—SKOLEMschen Satz, demzufolge jedes widerspruchslose Axiomensystem, das durch eine Zählausdruck (oder durch eine Konjunktion einer abzählbaren Folge von solchen) ausdrückbar ist, sich innerhalb einer abzählbaren Gesamtheit realisieren lässt. Diese Benennung kann vielleicht, insbesondere von Anfängern, missverstanden werden, da sie geeignet ist, den Anschein zu erwecken, als ob es hier um eine neue Antinomie handeln würde, welche durch den axiomatischen Aufbau der Mengenlehre nicht beseitigt ist. In Wahrheit handelt es sich bloss um einen Satz, der, obwohl überraschend, jedoch keinen Widerspruch enthält, so dass die erwähnte Benennung wohl in dem Sinne zu verstehen ist, wie das „hydrostatische Paradoxon“. Auch die Vorsicht, die man aus den folgenden Worten FRAENKELS: „. . . wenn die Schlüsse LÖWENHEIMS und SKOLEMS lückenlos und ohne Missvertständnis verlaufen . . .“ entnehmen kann, scheint gegenüber dem vollständig korrekten und klaren Beweis jenes schönsten Satzes aus dem Gedankenkreise des Entscheidungsproblems übertrieben zu sein.

Ohne Zweifel wird die dritte Auflage an Erfolg die vorangehenden, wenn möglich, noch übertreffen.

L. Kalmár.

Wilhelm Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Band III: Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln, bearbeitet von Gerhard Thomsen (Grundlehren der math. Wissenschaften XXIX), X + 474 S., Berlin, J. Springer, 1929.

Das Buch von Blaschke und Thomsen behandelt die Differentialgeometrie der kugelgeometrischen bzw. kreisgeometrischen Gruppen von Lie, Möbius und Laguerre. In der Raumgeometrie von Lie werden Abbildungen betrachtet, welche eine Berührung der sogenannten *K*-Kugeln invariant lassen. Die Geometrie von Möbius und Laguerre werden in die Geometrie von Lie eingebaut.

Das Buch beginnt mit der Geometrie von Möbius in der Ebene (mit der sogenannten Inversionsgeometrie). Es wird erstens gezeigt, dass die Gruppe von Möbius mittels der stereographischen Projektion sich als Abbild der hyperbolischen Bewegungen des Raumes auffassen lässt; dann folgt die Behandlung der Invariantentheorie der Gruppe von Möbius. Kapitel 3. enthält differentialgeometrische Untersuchungen über Kreisscharen, Kurven und Kurvennetze in der ebenen Geometrie von Möbius. Dann wird ein ganzes Kapitel der Geometrie von Laguerre in der Ebene gewidmet, und es wird gezeigt, dass die sogenannte isotrope Projektion die Abbildung einer projektiven Gruppe des Raumes auf die Gruppe der Transformationen von Laguerre in der Ebene liefert. Es werden hier noch unter anderen die geraden Kreisscharen, ebene und sphärische Kreissysteme untersucht. Das nächste Kapitel enthält die Geometrie von Lie in der Ebene; hier wird gezeigt, dass die Gruppen von Möbius und Laguerre Untergruppen der Gruppe der Transformationen von Lie sind. Kapitel 6. beginnt mit der Grundbegriffe der Kugelgeometrie von Lie und schliesst mit verschiedenen differentialgeometrischen Untersuchungen der kugelgeometrischen Gruppen von Lie, Laguerre und Möbius. Dann wird die Flächentheorie der Geometrie von Möbius (welche zum ersten Male systematisch in den Arbeiten von Blaschke, Thomsen und Takasu behandelt wurde) und die von Laguerre entwickelt; hiervon wird zu den zweiparametrigen Systemen von Kugeln übergegangen. Aus diesen Untersuchungen folgt eine gemeinsame Behandlung der hyperbolischen, elliptischen und euklidischen Flächentheorie. Wir erwähnen nur noch aus diesem Kapitel die Ausführungen über *M*-Minimalflächen und *L*-Minimalflächen und über Flächentheorie in Bonnetschen Koordinaten. Das letzte Kapitel enthält Untersuchungen über Flächen in der Geometrie von Lie, welche von Thomsen herrühren. Man findet in dem Anhang drei kurze Lebensbilder von Möbius, Laguerre und Lie.

Wir haben nur in grossen Zügen den Stoff dieses reichhaltigen Buches, welches im Sinne der Ideen des Erlanger Programms von Klein entstanden ist, skizziert. Das Buch ist leicht lesbar und die einzelnen Kapitel werden durch Aufgaben ergänzt. Dieses schöne Werk der hamburgischen differentialgeometrischen Schule kann wirklich ein grosses Interesse beanspruchen.

St. Lipka.

Betrand Russell, Philosophie der Materie (Wissenschaft und Hypothese XXXII), deutsch von Kurt Grelling, XI + 433 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1929.

Das vorliegende Buch gibt eine vorzügliche, einheitliche Darstellung von den philosophischen Ergebnissen der neueren Fortschritte der Mathematik und der Physik. Im ersten Teil wird die moderne Physik in Bezug auf eine logische Begründung hin untersucht. Der zweite Teil analysiert die Rolle der Wahrnehmung in der Physik. Im dritten Teil wird die Struktur der physischen Welt untersucht, wobei auch die modernsten Untersuchungen über Mengenlehre und Dimensionstheorie zur Anwendung gelangen.

Das Buch verdient in seinem Ganzen ein hohes philosophisches Interesse; in seinen einzelnen Abschnitten findet man vorzügliche Orientierung über verschiedene moderne Gebiete der Mathematik und der Physik.

B. von Kerékjártó.

F. Grundel, Die Mathematik an den deutschen höheren Schulen, Teil I: von der Zeit Karls des Grossen bis zum Ende des 17. Jahrhunderts und **Teil II:** vom Anfang des 18. Jahrhunderts bis zum Anfang des 19. Jahrhunderts, VI + 110 bzw. VI + 148 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1928 bzw. 1929.

Dieses höchst interessante Werk ist die erste zusammenhängende Schrift über die Stellung der Mathematik in den ältesten Lehrplänen Deutschlands. Es beginnt mit der Schilderung der Tätigkeit Alkuins, der entscheidend auf das Schulwesen des Mittelalters eingewirkt hat, und mit dem mathematischen Unterricht an den Dom- und Klosterschulen gegen Ende des 8. Jahrhunderts. Neben der vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen wurde Geometrie, Musik und Astronomie gelehrt, auch wurde die Auflösung von linearen Gleichungen behandelt. Eingehend schildert der Verfasser die Stellung der Mathematik an den gelehrten Schulen von der Reformation bis 1700. Wie sich die Gliederung des mathematischen Lehrstoffes im 17. Jahrhundert formte, zeigt Verfasser, indem er den Plan von Comenius mitteilt, der im Jahre 1651 in Sáros-Patak auf veranlassung der Fürsten Rákóczy eine siebenklassige Anstalt errichtete. Ausser Geometrie wurden hier unterrichtet: die vier Grundrechnungsarten, die Lehre von den Proportionen, Gesellschafts- und Alligationsrechnung, Übungen in allem, was ein künftiger Rechnungsbeamter zu tun und zu leisten hat, die heiligen und die mystischen Zahlen der Bibel.

Der zweite Teil zeigt die Entwicklung des mathematischen Unterrichts im 18. Jahrhundert. Durch die Entwicklung des Schulwesens in diesem Jahrhundert wurde auch die Mathematik aus ihrer untergeordneten und nebensächlichen Stellung des 17. Jahrhunderts erlöst. Die Ausführungen geben hinreichende Auskunft über den Inhalt der Schulmathematik dieses Jahrhunderts, über die am meisten gebrauchten Lehrbücher und Unterrichtsmethoden, über Kenntnisse und Fähigkeiten der Lehrer für Mathematik und über die Leistungen der Schüler. Die geschichtlichen Bemerkungen über

Algebra und Dezimalbruchrechnung in diesem Teil ist eine recht interessante Lektüre. Ausser der Planimetrie wurde an den meisten Schulen die ebene, vereinzelt auch die sphärische Trigonometrie, sowie Stereometrie gelehrt. Die Buchstabenrechnung geht bis zu den Wurzeln, Proportionen, Logarithmen und Reihen. Am meisten wurde die angewandte Mathematik betrieben. Bedenkt man noch, dass ein Jahrhundert vorher nur wenige Gelehrtenschulen über die vier Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen und gemeinen Brüchen hinausgingen, so ist der Fortschritt recht beachtenswert. Die mathematischen Durchschnittsleistungen der Abiturienten um das Jahr 1800 entsprachen etwa denen eines Tertianers von heutzutage.

Eine Tabelle zeigt die Stellung der Mathematik in den Lehrplänen der preussischen Gymnasien und Gelehrtenschulen am Ende des 18. und zu Beginn des 19. Jahrhunderts.

Der Verfasser hat sich durch sein umfassendes Quellenstudium einen besonderen Verdienst um die Unterrichtsgeschichte der Matematik erworben.

A. Szenes.

Ein Quadrat (Pseudonym von **Edwin A. Abbot**), **Flächenland** (Math.-Phys. Bibliothek, Bd. 83), aus dem Originalwerk „Flatland" ausgewählt und ins deutsche übertragen von Werner Bieck, IV + 49 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1929.

Ein quadratförmiger Bewohner des Landes der zwei Dimensionen erzählt seine sonderbare Lebensgeschichte. Er hat vom Linienland geträumt, ist dann ins Raumland geraten; seine Neugierde wurde für die Länder der vier und noch mehr Dimensionen erweckt; er wurde deshalb ins Flächenland zurückgestossen, wo ihm das traurige Schicksal des wegen seiner Irrlehre verfolgten Apostels des Evangeliums der drei Dimensionen zuteil geworden ist.

Die alte didaktische Idee, den gedanklichen Übergang von drei zu vier Dimensionen durch die Analogie zu dem Übergang von einer Dimension zu zwei und von zwei zu drei Dimensionen zu erleichtern, wurde hier in sehr origineller Form eines Märchens auch für junge Leute zugänglich gemacht.

L. Kalmár.

L. E. Dickson, Höhere Algebra, autorisierte deutsche Ausgabe von Ewald Bodewig, VII + 242 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1929.

Ohne Zweifel ist das Interesse für die Algebra im steten Anwachsen begriffen und zwar nicht nur bei den Mathematikern, sondern auch bei den Naturforschern, für die durch die gewaltige Entwicklung der modernen Quantentheorie die algebraischen Methoden ein unentbehrliches wissenschaftliches Instrument geworden sind. Und zwar handelt es sich dabei um solche Gebiete, welche man früher häufig als „formale" Algebra bezeichnet hat, die oft auch den Mathematikern schwer zugänglich waren. Eine Darstellung dieser Theorien ist jedem Fachgenossen willkommen, insbesondere, wenn sie von einer so berufener Feder herrührt, wie die des um dieses Gebiet hochverdienten L. E. Dicksons.

Die beiden einleitenden Kapitel sind der Invariantentheorie gewidmet; dabei wird die symbolische Methode nicht benutzt und dieser Umstand ist eine grosse Erleichterung insbesondere für die Anfänger. Der erste Hauptteil (Kap. III—VII) beschäftigt sich mit der Theorie der Matrizen, und mit den damit zusammenhängenden Fragen der Transformationstheorie der bilinearen Formen. Freudig wird man insbesondere die Elementarteilertheorie begrüssen und jeder Kenner dieser Theorien wird die im Kap. VI gegebene, vom Verfasser herrührende höchst elegante Behandlungsweise der Äquivalenz von Matrizenpaare mit grosser Anerkennung lesen. Der zweite Hauptteil (Kap. VIII—XIII) ist der Galoisschen Theorie gewidmet; die ersten drei Kapitel (VIII—X) enthalten eine ausserst knappe, aber sehr klare Darstellung dieser Disziplin, die drei folgenden beschäftigen sich mit den Anwendungen dieser Theorie, insbesondere enthält Kap. XIV die Theorie der Polyedergruppe und die damit zusammenhängenden Probleme der Gleichungen fünften Grades.

Das letzte Kapitel gibt im engen Anschluss an eine bekannte Arbeit von I. Schur einen Einblick in die Theorie der Gruppencharaktere.

A. H.

F. F. P. Bisacre, Praktische Infinitesimalrechnung, berechtigte deutsche Ausgabe unter Mitwirkung von E. Trefftz herausgegeben von E. König, XI + 364 S., Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1929.

Das vorliegende Buch gibt den Studierenden der Naturwissenschaften und des Ingenieurwesens eine gute Einführung in die Differential- und Integralrechnung und wendet die mathematischen Methoden auf eine reiche Anzahl von physikalischen, chemischen und technischen Probleme an. Diese Anwendungen machen ungefähr die Hälfte des Buches aus. Die leicht fassliche Darstellung des Stoffes, die glücklich getroffenen Anwendungen und Übungsaufgaben und der verhältnissmässig kleine Umfang machen das Buch besonders geeignet, die mathematischen Vorkenntnisse der Naturwissenschaften in weiteren Kreisen zu verbreiten. Die Bildnisse und die kurzen Lebensbeschreibungen einiger berühmter Mathematiker und Naturwissenschaftler erhöhen den Wert des Buches.

Nagy.